FA 6.2, AN 3.3

1 Der schiefe Wurf

Die Flugbahn von Bällen entspricht annähernd einer Parabel. Ein Golfball wird mit der Geschwindigkeit v_0 unter einem Abschusswinkel von ω abgeschlagen. Die Länge des Golfschlages, also die waagrechte Entfernung des Balles vom Abschlagsort, wird durch die folgende Gleichung beschrieben.

$e = 2 \cdot \frac{v_0^2}{9{,}81} \cdot \sin(\omega) \cdot \cos(\omega)$

ω … Abschlagswinkel ist im Bogenmaß

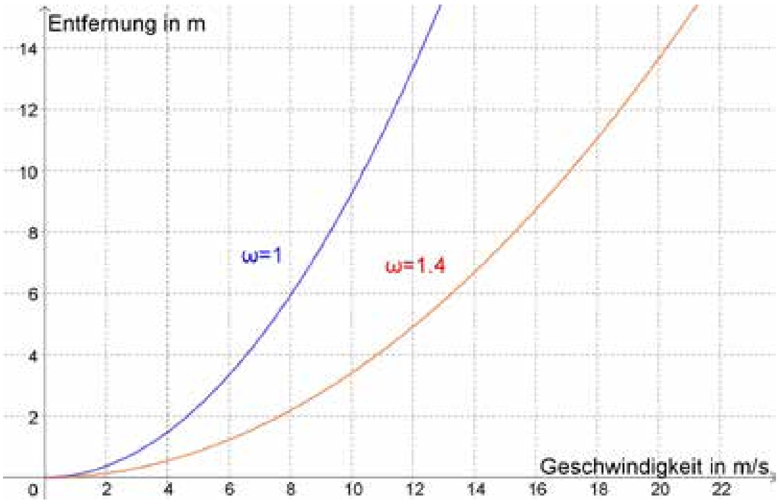
v_0 … Geschwindigkeit beim Abschlag in m/s

FA 6.2, AN 3.3

a) **1)** Berechnen Sie, bei welchem Abschusswinkel (in Rad und in Grad) der Golfspieler die größte Weite erzielen kann.

FA 1.5

2) In der Abbildung sind zwei Funktionen der Entfernung in Abhängigkeit vom Abschlagswinkel ω zu sehen. Vergleichen Sie die beiden grafischen Darstellung der Entfernung des Golfballes vom Abschlagort in Bezug auf Geschwindigkeit, Wurfweite und Abschlagswinkel.



b) Die Höhe des abgeschlagenen Golfballes wird durch die Funktionsgleichung $h(x) = -a \cdot x^2 + b \cdot x$ beschrieben.

h … Höhe in m

x … horizontale Entfernung von Abschlagsort in m

Sie wissen weiters, dass $h(100) = 0$ gilt.

FA 1.5, FA 4.3

1) Ermitteln Sie jene horizontale Entfernung vom Abschlagort, bei der die Höhe des Golfballes maximal ist.

AN 1.3

2) Begründen Sie, warum der Abschlagswinkel ω gleich jenem Winkel ist, unter dem der Golfball auf einer ebenen Fläche aufschlägt, wenn die Strecke zwischen dem Abschlagsort und dem Aufschlagsort horizontal ist.

AN 3.1

c) **1)** Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit ein Golfball abgeschlagen wurde, dessen erreichte Länge 308,36 m betrug bei einem Abschusswinkel von 45°.

FA 3.3

2) Beschreiben Sie, wie sich die Länge des Golfschlages verändert, wenn die Geschwindigkeit um 10 % gesteigert werden kann, der Abschusswinkel aber unverändert bleibt.

FA 1.1

d) Begründen Sie, warum die grafische Darstellung der Funktionsgleichung, welche die waagrechte Entfernung des Golfballes vom Abschlagsort in Abhängigkeit vom Abschusswinkel beschreibt, keiner Parabel entspricht.

Elisabethbrücke in Budapest

2

Die Elisabethbrücke in Budapest ist eine Hängebrücke über die Donau. Sie ist insgesamt 380 m lang, die Spannweite zwischen den Pfeilern beträgt 290 m. Die Pfeiler sind 50 m hoch (vom Wasserspiegel aus gemessen), davon liegen 38 m oberhalb der Brücke. Zwischen den Pfeilern haben die Tragseile annähernd die Form einer Parabel p, deren tiefster Punkt 20 m über dem Wasserspiegel liegt.

Quelle: Norbert Aepli, Switzerland [CC BY 2.5 (https://creativecommons.org/licenses/by/2.5)]

Legen Sie den Koordinatenursprung in das untere Ende des linken Brückenpfeilers (auf der Höhe des Wasserspiegels).

a) **1)** Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der quadratischen Funktion, die die Form des Tragseils beschreibt. FA 1.5, FA 1.7

2) Berechnen Sie die Koeffizienten und stellen Sie die quadratische Funktionsgleichung $p(x)$ auf. AG 2.5

b) Der Fußpunkt des rechten Brückenpfeilers hat die x-Koordinate x_R.

1) Begründen Sie, warum $p'(x_R) = -p'(0)$ gilt. AN 3.3

2) Erklären Sie die Bedeutung des Zahlenwertes von $p'(x_R)$. AN 1.3
(Eine Berechnung dieses Wertes ist nicht erforderlich.)

c) Berechnen Sie die Länge und den Steigungswinkel der geraden Abschnitte des Tragseils zwischen den Pfeilern und den Verankerungen im Boden. AG 4.1

d) Die Form der Unterseite der Brücke kann durch eine Funktion $g(x)$ angenähert werden. Interpretieren Sie, was durch das Integral $\int_0^{290} g(x)\,dx$ berechnet wird. AN 4.3

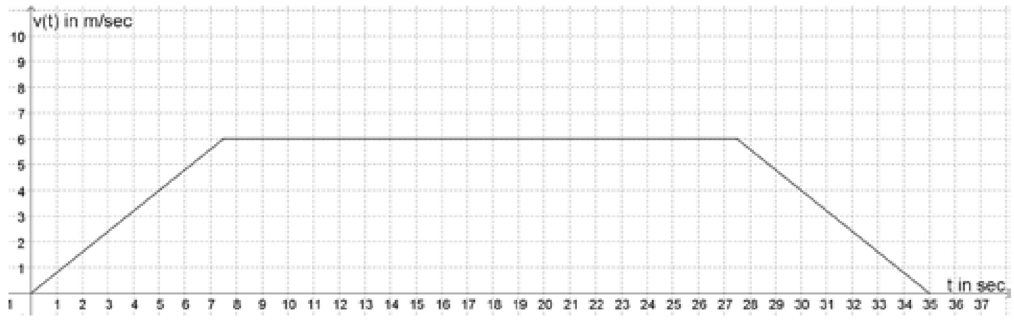
3 Donauturm

Der Donauturm in Wien wurde 1964 anlässlich der Wiener Internationalen Gartenschau eröffnet. Er war lange Zeit das höchste Gebäude Wiens und ist ein beliebter Aussichtsturm.

a) Der Aufzug zum Zentralgeschoß beschleunigt zuerst 7,5 Sekunden lang gleichmäßig, fährt dann 20 Sekunden mit der gleichbleibenden Geschwindigkeit von 6 m/s und verzögert schließlich wieder 7,5 Sekunden lang gleichmäßig.

AG 2.4 **1)** Berechnen Sie die Beschleunigung des Aufzuges in der ersten Beschleunigungsphase.

FA 1.4 **2)** Der Geschwindigkeitsverlauf des Aufzuges ist in folgendem Zeit-Geschwindigkeit-Diagramm dargestellt.



Erklären Sie, wie Sie aus diesem Diagramm die Höhe des Zentralgeschoßes bestimmen können, und geben Sie diese Höhe an.

b) In einem anderen Modell ist der Verlauf der Beschleunigung nicht genau bekannt.
Die Funktion h(t) gibt die Höhe des Aufzuges an.
$h(t)$ … Höhe in m
t … Zeit in Sekunden
Der Zeitabschnitt zwischen der 5. und der 25.Sekunde ist in der folgenden Tabelle dargestellt.

t	$h(t)$
5	10
10	40
15	70
20	100
25	130

FA 2.1, FA 2.5 **1)** Stellen Sie eine Funktionsgleichung für das Zeitintervall [5; 25] auf, die diesen Zusammenhang beschreibt.

AN 3.3 **2)** Beschreiben Sie, was sich über deren erste und zweite Ableitung zu einem bestimmten Zeitpunkt nach der 25. Sekunde folgern lässt, wenn der Aufzug vor Erreichen des Zentralgeschoßes bremst.

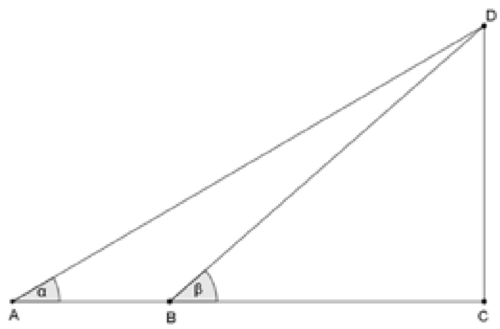
c) Von den Enden einer 50 m langen, horizontalen Standlinie $\overline{AB}$ = s, die mit dem Punkt C in einer Linie liegt, wurden zur Turmspitze die Höhenwinkel α = 37,35° und β = 42,00° gemessen. Der Höhenunterschied h zwischen Messgerät und Turmspitze kann mit folgender Formel berechnet werden:

$$h = \frac{s \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)}{\sin(\beta - \alpha)}$$

Das Messinstrument befand sich in 1,60 m Höhe.

AG 4.1 **1)** Berechnen Sie die Höhe des Donauturms.

AG 4.1 **2)** Erklären Sie den Zusammenhang zwischen der Skizze und der angegebenen Formel.



Fahren mit dem PKW

4

Ein PKW fährt von einem Parkplatz weg. Die oftmals gebräuchliche Geschwindigkeitsangabe von km/h ist in der Physik eher ungebräuchlich, dort wird Geschwindigkeit meist in m/s gemessen. Die Geschwindigkeit des Autos in den ersten 6 Sekunden wird durch folgende Funktion beschrieben:

$v(t) = 5t$

$v(t)$ … Geschwindigkeit in m/s zum Zeitpunkt t

t … Zeit in s

Für den in den anschließenden 2 Minuten zurückgelegten Weg gilt:

$s(t) = 30t - 90$

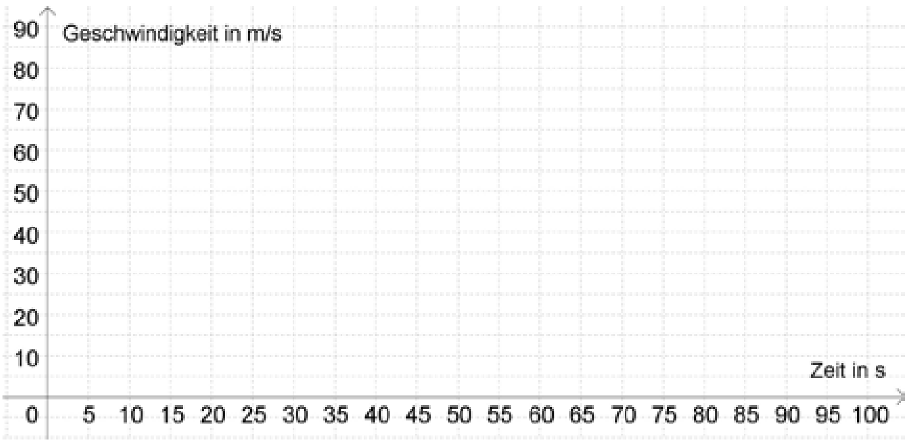
$s(t)$ … Weg in m zum Zeitpunkt t

t … Zeit in s

a) 1) Berechnen Sie die Geschwindigkeit nach 2 Sekunden in km/h. AN 3.2

2) Begründen Sie mathematisch, warum der PKW in den ersten 6 Sekunden beschleunigt. AN 1.3

b) 1) Stellen Sie die Geschwindigkeit in der ersten Minute im angegebenen Koordinatensystem grafisch dar. AN 3.2



2) Begründen Sie, warum $\frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = v'\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right)$ gilt, wenn, $t_1, t_2 \in [6; 120]$. AN1.2, AN 1.3

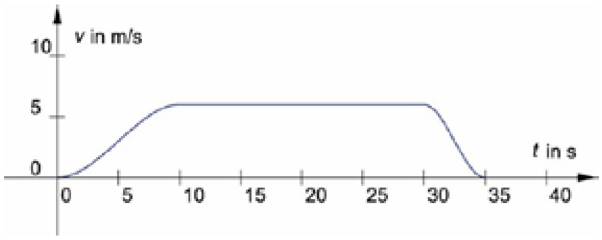
c) 1) Berechnen Sie den Weg, den das Auto in den ersten 5 Sekunden zurücklegt. AG 2.1

2) Begründen Sie mittels grafischer Darstellung im Koordinatensystem, warum sich der in der ersten Sekunde zurückgelegte Weg durch $s = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5$ berechnen lässt. AN 4.1, AN 4.3

5 Fernsicht

Von einer Aussichtsplattform in 250 m Höhe über einem waagrechten Gelände in Wien hat man an klaren Tagen eine gute Fernsicht. Um auf diese Plattform zu gelangen, muss man mit einem Aufzug fahren.

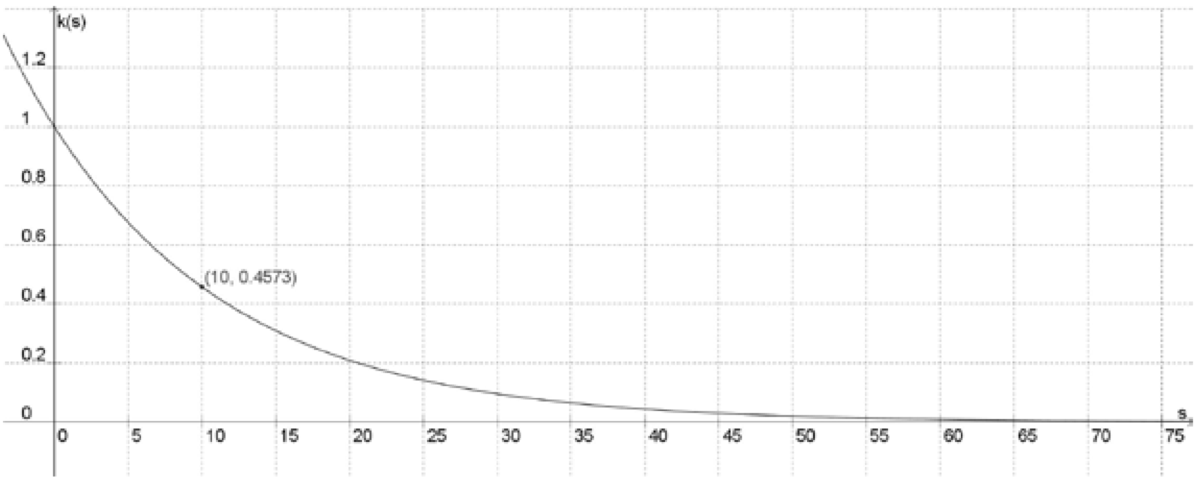
a) Bei nicht konstanter Beschleunigung des Aufzugs ergibt sich folgendes Diagramm, in dem der Geschwindigkeitsverlauf dargestellt wird:



FA 1.5 **1)** Interpretieren Sie die Grafik hinsichtlich der Geschwindigkeit des Aufzugs. Legen Sie dabei besonderes Augenmerk darauf, ob die Beschleunigungs- oder die Bremsphase länger dauert und wann die Beschleunigung am höchsten ist.

AN 3.3 **2)** Erklären Sie die folgende Gleichung im Kontext:
$v'(32) = -1{,}5 \cdot v'(5)$

b) Die Sichtweite ist abhängig vom Wetter. Wegen der Lichtdämpfung in der Luft nimmt der Kontrast $k(s)$ in Prozent mit zunehmender Entfernung exponentiell ab. Um noch etwas erkennen zu können, muss der Kontrast mindestens 2 % betragen.
$k(s)$ … Kontrast in der Entfernung s in Prozent
s … Entfernung in m
In der Grafik ist der noch bestehende Kontrast bei sehr klarem Wetter abgebildet.



FA 5.2 **1)** Geben Sie an, um wie viel der Kontrast bei einer Entfernung von 20 km abnimmt.

FA 5.1 **2)** Erstellen Sie eine Funktionsgleichung der Art $k(s) = a \cdot b^s$, welche diesen Sachverhalt wiedergibt.

FA 5.2 **3)** Berechnen Sie, wie weit man bei diesen Wetterbedingungen maximal sehen kann.

FA 5.4 **4)** Erklären Sie, warum folgender Zusammenhang in diesem Kontext gilt:
$f(s+1) = f(s) \cdot b$

c) Atmosphärische Sichtweite ist die Abnahme des Kontrastes relativ zum Himmel mit zunehmender Entfernung.
Die atmosphärische Streuung und Absorption reduzieren den Kontrast eines Objekts relativ zur Umgebung. Dieses Phänomen nennt man Lichtdämpfung. Der Kontrast K hängt exponentiell von der Entfernung s und einem Absorptionskoeffizienten σ ab:
$K(s) = K_0 \cdot e^{-\sigma \cdot s}$
K_0 … Ausgangskontrast, prozentuelle Angabe in Dezimalzahl
$K(s)$ … Kontrast in der Entfernung s, prozentuelle Angabe in Dezimalzahl
s … Entfernung in km
σ … Absorptionskoeffizient
In der folgenden Tabelle sind einige Wetterbedingungen und die dazugehörigen Sichtweiten angegeben.

Wetterabhängigkeit der Sichtweite	
Wetterbedingung	Sichtweite in km
klar	20
leicht diesig	10
diesig	4
starker Dunst, leichter Nebel	2
mäßiger Nebel	1
dichter Nebel, Starkregen	0,1
extremer Nebel, Schneetreiben	0,01

Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Sichtweite (28.01.2020)

1) Für diesiges Wetter gilt der Wert σ_{diesig}. Erklären Sie, wie sich dieser Wert verändert, wenn das Wetter klar ist bzw. wenn mäßiger Nebel die Sicht beeinträchtigt. FA 5.3
2) Erklären Sie in diesen Zusammenhang die Bedeutung des folgenden Ausdrucks: AN 1.1

$$\frac{k(10) - k(0)}{10} < \frac{k(25) - k(35)}{10}$$

6 Holzquader

Ein Holzquader, der auf einer waagrechten Platte liegt, ist mit einem Faden über eine reibungsfreie Rolle mit einem Massestück verbunden. Zu Beginn der Messung ist er an der Platte fixiert, lässt man die Fixierung los, so setzt er sich durch die Beschwerung mittels der Masse auf Grund der Gravitationskraft in Bewegung. Die Reibung des Holzquaders kann dabei als konstant angenommen werden.
Der Holzquader legt dabei einen Weg s zurück, der die geradlinige Entfernung von Startpunkt beschreibt. Der Zeitpunkt $t = 0$ gibt den Augenblick an, an dem der Quader von der Fixierung gelöst wird. Im Folgenden sind einige Messwerte angegeben:

t in s	s in m
0,9	0,081
1,8	0,324
2,5	0,625
3,4	1,156

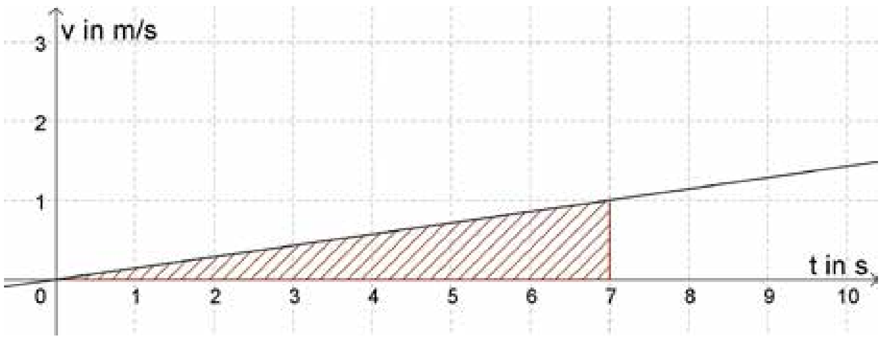
FA 1.3 AN 1.2

a) 1) Stellen Sie die Messpunkte und einen möglichen Funktionsgraphen, der durch diese Messwerte erzeugt wird, grafisch dar.
2) Zeichnen Sie eine Tangente in einem dieser Punkte und erklären Sie die Bedeutung des Anstiegs dieser Tangente.

FA 4.2 AN 3.1

b) 1) Modellieren Sie eine Funktionsgleichung 2. Grades $s(t)$, welche den Zusammenhang zwischen der Zeit t und dem Weg s erzeugt.
2) Zeigen Sie, dass es sich dabei um eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung handelt.

c) Im Rahmen einer anderen Versuchsreihe wird ein folgender funktionaler Zusammenhang ermittelt:



AG 2.1 AN 4.3

1) Berechnen Sie die markierte Fläche.
2) Interpretieren Sie diese in Bezug auf die Bewegung des Holzquaders.