# 1 Gleichungen höheren Grades

Einstieg

## E1 Das solltest du schon können:

- lineare und quadratische Gleichungen ohne Technologie lösen
- Funktionen darstellen, auch ohne Technologie
- den Begriff Diskriminante und ihre Bedeutung für quadratische Gleichungen kennen

## E2 Was lernst du in diesem Kapitel?

In deiner Schulzeit hast du schon viele Gleichungen oder Gleichungssysteme gelöst, manche davon waren einfacher, manche etwas komplexer. Du kannst dich sicher noch an die quadratischen Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$ erinnern, für deren Lösung du schon eine eigene Lösungsformel anwenden musstest.

In diesem Kapitel geht es darum, Gleichungen zu lösen, bei denen die Variable in (noch) höheren Potenzen vorkommt. Für diese Gleichungen gibt es keine einfachen Lösungsformeln wie bei quadratischen Gleichungen, aber es gibt ein paar spannende Tricks, wie man einige dennoch ohne Technologie lösen kann, z. B.: **Abspalten von Linearfaktoren, Substitution, Produkt-Null-Satz,** …
Auf der nächsten Seite findest du ein paar mathematische Denksportaufgaben, die auf das Lösen einer komplizierteren Gleichung hinauslaufen.

## E3 Am Ende des Kapitels kannst du …

- algebraische Gleichungen durch Faktorisieren (Herausheben) lösen.
- Polynomdivisionen durchführen und Linearfaktoren abspalten.
- biquadratische Gleichungen erkennen und durch Substitution lösen.
- Nullstellen von Polynomfunktionen im Zusammenhang deuten und diese berechnen.
- mehrfache Nullstellen erkennen.

**Kompetenzen für die schriftliche Reifeprüfung:**
- FA-R 4.4 Den Zusammenhang zwischen dem Grad der Polynomfunktion und der Anzahl der Nullstellen kennen

Die nächsten drei Aufgaben führen zu Gleichungen, die du ohne Technologie nicht lösen kannst.

### Swimmingpool

1.0.01
H1, H2
digi.schule/am7k10a01

Mein Pool ist halb so tief wie breit, aber um zwei Meter länger als breit;
er fasst genau acht Kubikmeter.

Sag mir jetzt, wie lang mein Pool ist.

### Wie viele Trüffeln?

1.0.02
H1, H2
digi.schule/am7k10a02

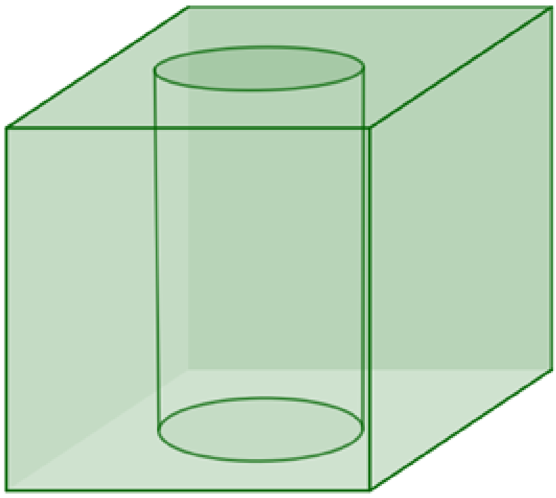
Donald kauft für Daisy Trüffeln. Diese sind in Tüten verpackt, und jede Tüte enthält gleich viele Trüffeln. Eine Trüffel kostet um drei Kreuzer mehr als Trüffeln in einer Tüte sind. Donald kauft drei Tüten weniger als Trüffeln in einer Tüte sind. Er bezahlt letztlich 9 072 Kreuzer.

Wie viele Trüffeln sind wohl in einer Tüte?

### Zylinder im Würfel

1.0.03
H1, H2
digi.schule/am7k10a03

Es soll in einen würfelförmigen und mit Wasser voll befüllten Glasbehälter mit unbekannter Seitenlänge ein Drehzylinder mit gleicher Höhe und einem Durchmesser von 2,5 dm hineingesetzt werden, sodass Wasser aus dem Würfel verdrängt wird und überläuft.
Wie groß muss die Seitenlänge des Würfels gewählt werden, damit genau 10 Liter Wasser im Würfel verbleiben?



## 1.1 Grundlagen zum Lösen von Gleichungen höheren Grades

Demo 1.1.01

### Allgemeine Gleichungen höheren Grades

Bisher haben wir lineare, quadratische und sehr einfache Gleichungen höheren Grades der Form $a x^n + b = 0$ betrachtet. Nun gibt es aber allgemeinere Formen von Gleichungen höheren Grades, die wir anhand folgenden Beispiels herleiten:

Das Produkt von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ergibt 504.
Berechne diese drei Zahlen.

Lösungsweg:
Wir modellieren die erste unbekannte Zahl als $x$ mit $x \in \mathbb{N}$ und erhalten

$x(x+1)(x+2) = 504$

bzw. nach dem Ausmultiplizieren der linken Seite und dem Umstellen der rechten Seite:

$x^3 + 3x^2 + 2x - 504 = 0$

Dies ist eine (algebraische) Gleichung vom Grad 3, da der höchste auftretende Exponent 3 ist. Diese Gleichung wird auch als **kubische Gleichung** bezeichnet.

Derartige Gleichungen haben wir bis jetzt noch nicht betrachtet.
Wir können vorerst die Lösung mit einem Computeralgebrasystem berechnen:

**Geogebra**

- in CAS die Gleichung eingeben
  Anschließend den Button x = drücken.
- oder: Löse(Gleichung)
  z.B: Löse(x^3+3 x^2+2 x-504=0,x)
  oder Löse(x(x+1)(x+2)=504,x)
  $\Rightarrow \{x = 7\}$

$x = 7$
D.h. die drei gesuchten aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen sind 7, 8 und 9.
Dies zeigt auch die Probe: $7 \cdot 8 \cdot 9 = 56 \cdot 9 = 504$

1.1.02
H2
digi.schule/am7k11a02

### Gleichungen höheren Grades mit Technologieeinsatz lösen

Löse folgende Gleichungen mit Technologieeinsatz:

a) $x^4 + 5x^3 - 20x - 16 = 0$

b) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 9x + 18 = 0$

c) $x(x-1)(x-5) + 12 = 0$

d) $x^2(x-2) = (x-3)(x+2) + 1$

Definition

### Gleichungen höheren Grades

Eine Gleichung der Form

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$

mit $a_n \neq 0$ heißt **(algebraische) Gleichung** vom Grad $n$.

Dabei ist $n \in \mathbb{N}$ und die Koeffizienten sind alle reell, also $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Manchmal wird $a_0$ als **konstantes Glied** oder **Absolutglied** bezeichnet.

## Normierte Form

Merke

Ist der führende Koeffizient $a_n = 1$, dann ist die Gleichung **normiert** bzw. in **Normalform** gegeben.
Dies kennen wir bereits. Die normierte quadratische Gleichung schreibt man als:

$x^2 + px + q = 0$

Der führende Koeffizient $a_2$ ist hier 1, die Konstante $a_0$ ist $q$.

## Normierte Gleichungen

1.1.03

H3

digi.schule/
am7k11a03

Markiere alle normierten Gleichungen.

| | |
|---|---|
| $x^3 - x^2 + 4x - 1 = 0$ | ☐ |
| $3x^4 - x^2 = 13$ | ☐ |
| $x^5 = 0$ | ☐ |
| $x^4 - \frac{3}{7}x^3 + 2x + \frac{1}{7} = 0$ | ☐ |
| $5x^2 - x^2 - x = 0$ | ☐ |

## Spezialfälle von Gleichungen höheren Grades

Merke

Manche Gleichungen höheren Grades lassen sich auch ohne Computereinsatz lösen. Die folgenden Methoden dazu behandeln wir nach und nach, damit wir ein mathematisches Gefühl für Gleichungen höheren Grades gewinnen können:

1) Faktorisieren (Herausheben, Horner-Schema)
2) Substitution (Variable ersetzen)
3) Polynomdivision (Abspalten von Linearfaktoren)

Der Polynomdivision widmen wir ein eigenes Unterkapitel.

## Lösen von Gleichungen durch Faktorisieren (Herausheben)

Demo 1.1.04

Löse die Gleichung $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$ in der Grundmenge $G = \mathbb{R}$.

Lösungsweg:

In der Gleichung $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$ können wir die Variable $x$ herausheben und erhalten:

$x\,(x^2 - 2x - 3) = 0$

Wegen des Produkt-Null-Satzes gilt, dass die Gleichung genau dann 0 ist, wenn:

$x = 0$ oder $x^2 - 2x - 3 = 0$

Somit ist $x = 0$ eine Lösung. Die zweite Gleichung lösen wir mit Hilfe der kleinen Lösungsformel für quadratische Gleichungen (siehe Formelsammlung):

$x_{1,2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - (-3)} = 1 \pm \sqrt{4} = 1 \pm 2$

Wir erhalten also die Lösungsmenge $L = \{-1; 0; 3\}$.

Die Gleichung ließe sich dann analog dem Wurzelsatz von Vieta aufschreiben:

$x\,(x + 1)\,(x - 3) = 0$

**Geogebra**
Terme faktorisieren (herausheben):
- Faktorisiere(x^3-2x^2-3x)

$\Rightarrow\ x\,(x + 1)\,(x - 3)$

## 1.1 Grundlagen zum Lösen von Gleichungen höheren Grades

Merke

### Lösen von Gleichungen durch Faktorisieren

Die Variable $x$ lässt sich aus einer Gleichung nur herausheben, falls die Konstante $a_0 = 0$ ist.

1.1.05

H2

digi.schule/
am7k11a05

### Lösen von Gleichungen durch Faktorisieren

Finde die weiteren Lösungen durch Herausheben und anschließendes Lösen der quadratischen Gleichung.

**a)** $x^3 - 2x^2 + x = 0$

**b)** $x^3 - x^2 - 6x = 0$

**c)** $x^4 + 4x^2 + 4x^2 = 0$

**d)** $x^5 - x^4 - 12x^3 = 0$

Demo 1.1.06

### Division durch die Variable $x$

Tim löst die Gleichung der vorigen Demo 1.1.04 in seinem Schulheft wie folgt:

$x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \quad | : x$

$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad |\ pq\text{-Formel}$

$x_1 = -1, x_2 = 3$

$L = \{-1; 3\}$

Begründe, weshalb in der Lösungsmenge die offensichtliche Lösung $x = 0$ fehlt.

Lösungsweg:

Man kann nur durch Zahlen, die nicht null sind, dividieren, d.h. es wurde $x \neq 0$ in der ersten Umformung vorausgesetzt. Dadurch hat Tim die Lösung $x = 0$ verloren.

Merke

### Division durch die Variable $x$

Dividiert man eine Gleichung durch einen Term, der die Variable $x$ enthält, so können Lösungen verloren gehen.

Abhilfe: Faktorisieren!