5 Differentialrechnung: Erweiterung

Einstieg

E1 Das solltest du schon können:

- Ableiten von Polynomfunktionen
- die geometrische Bedeutung der ersten und zweiten Ableitung kennen
- Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte einer Polynomfunktion aufsuchen

E2 Was lernst du in diesem Kapitel?

Bislang kannst du nur Polynomfunktionen ableiten.
In diesem Kapitel lernst du dagegen, wie man **beliebig komplexe Funktionen ableiten** kann. Dabei gibt es Techniken wie **Produktregel**, **Quotientenregel** oder **Kettenregel**, die hier zur Anwendung kommen. Das Handwerk des Differenzierens gerät allerdings durch den Einsatz technologischer Hilfsmittel immer mehr in den Hintergrund.

Ein weiteres wichtiges Thema ist die **Anwendung der Differentialrechnung** in der Wirtschaft. Größen wie z.B. Betriebsoptimum, Grenzkosten oder Kostenkehre werden mittels Differentialrechnung ermittelt. Dadurch lassen sich Fragen beantworten wie: ‚Wie viele Stück eines Produktes muss ich herstellen, damit mein Gewinn maximal wird?' oder ‚Wie ändern sich meine Kosten, wenn ich die Produktionszahl erhöhe?'

E3 Am Ende des Kapitels kannst du …

- alle Ableitungsregeln wie Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel anwenden.
- die Funktionen e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$ und $\log(x)$ sowie Potenzfunktionen mit reellen Exponenten differenzieren.
- Kurvendiskussion bei rationalen Funktionen, Winkelfunktionen und Exponentialfunktionen durchführen.
- stetige Funktionen von unstetigen unterscheiden.
- differenzierbare Funktionen von nicht differenzierbaren unterscheiden.
- Funktionen der Kosten- und Preistheorie definieren.
- besondere Stellen der Kosten- und Gewinnfunktionen berechnen.
- naturwissenschaftliche Zusammenhänge (Geschwindigkeit, Beschleunigung) mit Hilfe der Differentialrechnung deuten und untersuchen.

Kompetenzen für die schriftliche Reifeprüfung:
- FA-R 5.4 Charakteristische Eigenschaften $(e^x)' = e^x$ kennen und im Kontext deuten können
- FA-R 6.6 Wissen, dass gilt: $[\sin(x)]' = \cos(x)$, $[\cos(x)]' = -\sin(x)$
- AN-R 3.3 Eigenschaften von Funktionen mit Hilfe der Ableitung(sfunktion) beschreiben: Monotonie, lokale Extrema, Links- und Rechtskrümmung, Wendestellen

digi.schule/am7k5

Aufgaben zur Wiederholung 1

5.0.01
H2
digi.schule/am7k50a01

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

a) Bilde die ersten beiden Ableitungen.

b) Zeige, dass sich bei $x = 2$ eine lokale Extremstelle befindet.

c) Bestimme die Krümmung an der Stelle $x = 2$. Was lässt sich dadurch auf die Art der Extremstelle schließen?

d) Bestimme die Steigung der Funktion bei $x = -3$.

e) Bei welcher Stelle ist die Steigung der Tangenten gleich -5?

Aufgaben zur Wiederholung 2

5.0.02
H2
digi.schule/am7k50a02

Diskutiere die Funktion f mit $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x$ in Hinblick auf

- Nullstellen
- Extrema
- Wendepunkte
- Monotonie und Krümmungsverhalten

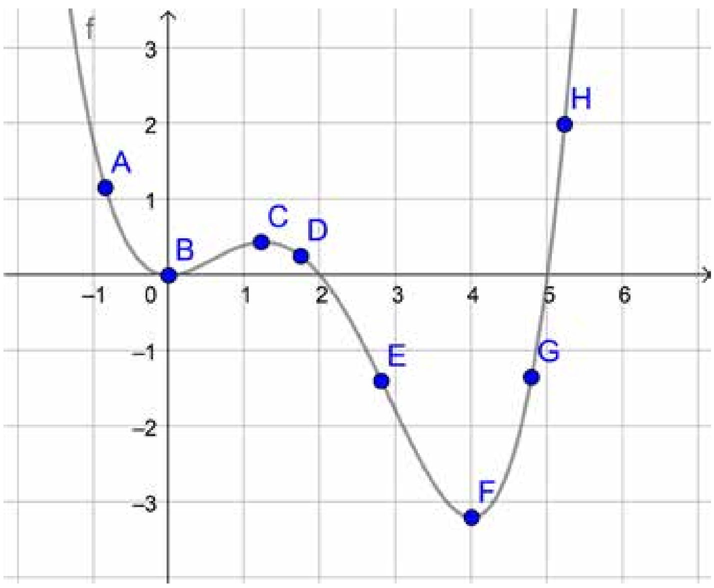
und formuliere die Gleichungen der Wendetangenten.

Aufgaben zur Wiederholung 3

5.0.03
H2
digi.schule/am7k50a03

Gib zu den betreffenden Punkten jeweils das Vorzeichen von $f(x)$, $f'(x)$ bzw. das Vorzeichen von $f''(x)$ an.

Z.B. Punkt A: $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$



5.1 Ableitungsregeln elementarer Funktionen

Alle diese Formeln und Regeln sind auch in der Formelsammlung enthalten.

Im vorigen Kapitel haben wir bereits die erste Ableitung folgender einfacher Funktionen hergeleitet:

Konstante Funktion: $f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R} \implies f'(x) = 0$
Identische Funktion: $f(x) = x \implies f'(x) = 1$
Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten: $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \implies f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Weiters haben wir folgende Ableitungsregeln bereits kennen gelernt:

Faktorregel: $g(x) = k \cdot f(x)$ mit $k \in \mathbb{R} \implies g'(x) = k \cdot f'(x)$
Summenregel: $h(x) = f(x) \pm g(x) \implies h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

In diesem Abschnitt werden wir die Ableitung weiterer elementarer Funktionen herleiten (Potenzfunktionen mit reellem Exponenten, trigonometrische Funktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen).

Herleitung 5.1.01

Ableitungsfunktion von $\frac{1}{x}$

Wir ermitteln die Ableitungsfunktion von $f(x) = \frac{1}{x}$ und den zugehörigen Definitionsbereich:

Zunächst berechnen wir den Differentialquotienten von f an der variablen Stelle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$f'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \lim_{x_1 \to x} \frac{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x}}{x_1 - x} = \lim_{x_1 \to x} \frac{x - x_1}{x_1 \cdot x \cdot (x_1 - x)} = \lim_{x_1 \to x} \frac{-1}{x_1 \cdot x} = -\frac{1}{x^2}$$

Die Ableitungsfunktion von f lautet also $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Da f' für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert ist, so ist der Definitionsbereich gleich $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, also $f'\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit der Zuordnung $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.

Satz

Ableitung von $\frac{1}{x}$

Die Ableitungsfunktion der Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$ lautet $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Der Definitionsbereich von f' ist wieder $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, also $f'\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$.

Herleitung 5.1.02

Ableitungsfunktion von $\sqrt{x}$

Wir ermitteln die Ableitungsfunktion von $f(x) = \sqrt{x}$ und den zugehörigen Definitionsbereich:

Zunächst berechnen wir den Differentialquotienten von f an der variablen Stelle $x \in \mathbb{R}^+$:

$$f'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \lim_{x_1 \to x} \frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x}}{x_1 - x}$$ Erweitern mit $(\sqrt{x_1} + \sqrt{x})$:

$$= \lim_{x_1 \to x} \frac{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x_1} + \sqrt{x})}{(x_1 - x) \cdot (\sqrt{x_1} + \sqrt{x})}.$$ Binomische Formel $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ anwenden:

$$= \lim_{x_1 \to x} \frac{x_1 - x}{(x_1 - x) \cdot (\sqrt{x_1} + \sqrt{x})}$$ Kürzen:

$$= \lim_{x_1 \to x} \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Die Ableitungsfunktion von f lautet also $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Da f' für alle $x \in \mathbb{R}^+$ definiert ist, so ist der Definitionsbereich gleich $\mathbb{R}^+$, also $f'\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit der Zuordnung $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Satz

Ableitung der Quadratwurzelfunktion

Die Ableitungsfunktion der Funktion $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x}$ lautet $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Der Definitionsbereich von f' ist $\mathbb{R}^+$, also $f'\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

digi.schule/am7k51

Vernetzung aller bekannten Ableitungen und Regeln

Demo 5.1.03

Bilde die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = 1 - x + 2x^2 - \frac{3}{x} + 4\sqrt{x}$.

Lösungsweg:

Mit der Faktor- und Summenregel folgt:

$$f'(x) = 0 - 1 + 2 \cdot 2x - 3 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -1 + 4x + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Potenzregel für reelle Exponenten

Herleitung 5.1.04

Stellen wir die Ableitungen von $\frac{1}{x}$ und $\sqrt{x}$ in der Potenzschreibweise dar:

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \implies f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \implies f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

Wir erkennen hier in beiden Fällen die Potenzregel für reelle Exponenten:

$$f(x) = x^q \implies f'(x) = q \cdot x^{q-1}$$

Die obigen zwei Beispiele sind noch kein Beweis für die Gültigkeit der Potenzregel für reelle Exponenten. Dies holen wir später nach, da wir dafür noch weitere Rechenregeln benötigen.

Potenzregel für reelle Exponenten

Merke

Die Ableitungsfunktion der Funktion $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^q$ und $q \in \mathbb{R}$ lautet:

$$f'(x) = q \cdot x^{q-1}$$

Der Definitionsbereich von f' ist $\mathbb{R}^+$:, also $f': \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

Anwendung der Potenzregel für reelle Exponenten

Demo 5.1.05

Bilde die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \frac{4}{x^3} + \sqrt[3]{x^4}$.

Lösungsweg:

Wir stellen f in der Potenzschreibweise dar:

$$f(x) = 4x^{-3} + x^{\frac{4}{3}}$$

Mit Hilfe der Potenzregel für reelle Exponenten folgt:

$$f'(x) = -12x^{-4} + \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} \text{ bzw. } f'(x) = -\frac{12}{x^4} + \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$$

5.1.06
H2
digi.schule/am7k51a06

Übungen zum Ableiten allgemeiner Potenzfunktionen

Bilde die erste und die zweite Ableitung.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

b) $f(x) = \frac{3}{x^5} + 2x^4$

c) $f(x) = -\frac{4}{3x^5}$

d) $f(x) = \frac{x}{2x^4}$

5.1.07
H2, H4
digi.schule/am7k51a07

Ableitung der Kubikwurzelfunktion

Zeige:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \implies f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

5.1.08
H2
digi.schule/am7k51a08

Übungen zum Ableiten allgemeiner Potenzfunktionen I

Bilde die erste und die zweite Ableitung.

a) $f(x) = 3\sqrt{x} + x$

b) $f(x) = 4\sqrt{x^5} - 4$

c) $f(x) = -\frac{3}{\sqrt{x}}$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x^3}$

5.1.09
H2
digi.schule/am7k51a09

Übungen zum Ableiten allgemeiner Potenzfunktionen II

Bilde die erste und die zweite Ableitung.

a) $f(x) = 1\sqrt[4]{x}$

b) $f(x) = 3\sqrt[3]{x^7} - 3\sqrt[4]{x}$

c) $f(x) = -\frac{7\sqrt[3]{x}}{x^4}$

d) $f(x) = -\frac{3\sqrt{x^5}}{4\sqrt[7]{x^3}}$

Satz

Ableitung von trigonometrischen Funktionen

Die Ableitungsregel für tan*x* folgt im nächsten Abschnitt.

$$f(x) = \sin(x) \implies f'(x) = \cos(x)$$

$$f(x) = \cos(x) \implies f'(x) = -\sin(x)$$

Um das zu veranschaulichen, differenziere die jeweiligen Winkelfunktionen mit Hilfe der Technologie grafisch.

Demo 5.1.10

Winkelfunktionen ableiten

Bilde die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = 3\sin(x) - 2\cos(x)$.

Lösungsweg:

Mit der Faktor- und Summenregel sowie dem obigen Satz folgt:

$$f'(x) = 3\cos(x) - 2 \cdot (-\sin(x)) = 3\cos(x) + 2\sin(x)$$