Aufgaben

40. Österreichische Mathematik-Olympiade 2009

Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger

23. Juni 2009

1. Zu jeder Seite eines Quadrats wird mit roter Farbe eine positive ganze Zahl geschrieben. Zu jedem Eckpunkt wird mit grüner Farbe das Produkt der beiden roten Zahlen geschrieben, die bei den angrenzenden Seiten stehen. Die Summe der grünen Zahlen sei 40.

   Welche Werte sind für die Summe der roten Zahlen möglich?

   (Gerhard Kirchner)

2. Es seien x und y nichtnegative reelle Zahlen.

   Man zeige:
   $$(x + y^3)(x^3 + y) \geq 4x^2y^2.$$

   Wann gilt Gleichheit?

   (Aufgabenkomitee)

3. Es stehen beliebig viele Briefmarken mit den Werten 134, 135, ..., 142 und 143 Cent zur Verfügung.

   Man bestimme den größten ganzzahligen Wert (in Cent), der nicht durch diese Briefmarken dargestellt werden kann.

   (Gerhard J. Woeginger)

4. Der Mittelpunkt M des Quadrats $ABCD$ wird an C gespiegelt. Dadurch erhält man den Punkt E. Der Schnittpunkt des Umkreises des Dreiecks BDE mit der Strecke AM wird mit S bezeichnet.

   Man zeige, dass S die Strecke AM halbiert.

   (Walther Janous)

Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene

23. April 2009

5. Man gebe einen möglichst großen Bereich $M \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ an, sodass für alle a, b, c, $d \in M$ die Ungleichung $\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \geq \sqrt{a+b} + \sqrt{c+d}$ gilt.

   Gilt dann auch für alle a, b, c, $d \in M$ die Ungleichung $\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \geq \sqrt{a+c} + \sqrt{b+d}$?

   (Bemerkung: $\mathbb{R}_{>0}$ ist die Menge der positiven reellen Zahlen.)

   (Gerd Baron)

6. Wie viele ganzzahlige Lösungen $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ hat die Gleichung

$$2x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 9?$$

   (Gerd Baron)

7. Gegeben ist das spitzwinklige Dreieck ABC (Durchlaufungssinn ABC gegen den Uhrzeigersinn) mit den Höhenfußpunkten D (auf BC), E (auf AC) und F (auf AB).

   Weiters seien P, Q und R wie folgt definiert:

   P ist im Dreieck CFB der Höhenfußpunkt von F auf BC.

   Q ist im Dreieck ADC der Höhenfußpunkt von D auf AC.

   R ist im Dreieck AEB der Höhenfußpunkt von E auf AB.

   Die sechs Punkte D, E, F, P, Q und R bilden bei passender Nummerierung $T_1T_2T_3T_4T_5T_6$ (gegen den Uhrzeigersinn mit $T_1 = P$) ein konvexes Sechseck (alle Winkel kleiner als 180°).

   Man zeige, dass in diesem konvexen Sechseck kein Punkt existiert, der auf allen drei Diagonalen T_1T_4, T_3T_6 und T_5T_2 liegt.

   (Gerd Baron)

8. Zwei unendliche arithmetische Folgen heißen *wesentlich verschieden*, wenn sie sich nicht nur durch das Fehlen endlich vieler Anfangsglieder bei der einen von ihnen unterscheiden.

   Wie viele paarweise wesentlich verschiedene nicht konstante arithmetische Folgen aus lauter positiven natürlichen Zahlen gibt es, die eine unendliche nicht konstante geometrische Folge enthalten, deren drittes Glied $40 \cdot 2009 = 80360$ ist?

   (Gerd Baron)

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene, Teil 1

17. Mai 2009

9. Man zeige, dass für alle positiven ganzen Zahlen n die folgende Ungleichung gilt:
$$3^{n^2} > (n!)^4.$$

(Gerd Baron)

10. Wir verallgemeinern die Funktionen Fakultät $n! = n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1$ und Doppelfakultät $n!! = n(n-2)(n-4)\dots 1$ für ungerade n und $n!! = n(n-2)(n-4)\dots 2$ für gerade n. Wir definieren für $n > 0$ die k-fache Fakultät $F_k(n) = n(n-k)(n-2k)\dots r$ mit $1 \leq r \leq k$ und $n \equiv r \pmod k$. Weiters sei $F_k(0) = 1$.

    Man bestimme alle natürlichen Zahlen n, sodass $F_{20}(n) + 2009$ eine Quadratzahl (das Quadrat einer natürlichen Zahl) ist.

(Gerd Baron)

11. Gegeben ist ein Rundkurs mit n Stationen ($n > 1$), der in beiden Richtungen befahrbar ist. Jeden Abschnitt zwischen zwei benachbarten Stationen nennen wir Teilstrecke. Eine der Stationen heißt Raach.

    Ein Bus soll in Raach starten und nach Durchfahren von $n+2$ Teilstrecken nach Raach zurückkehren, dabei hat er jede Station mindestens einmal zu besuchen.

    Man bestimme für jedes $n > 1$ die Anzahl $f(n)$ der Touren, die diese Bedingungen erfüllen.

(Gerd Baron)

12. Seien D, E und F die Seitenmittelpunkte des Dreiecks ABC (D auf BC, E auf CA und F auf AB).

    Weiters sei $H_aH_bH_c$ das Höhenfußpunktdreieck des Dreiecks ABC.

    Die Punkte P, Q und R seien die Seitenmittelpunkte des Dreiecks $H_aH_bH_c$ (P auf H_bH_c, Q auf H_cH_a und R auf H_aH_b).

    Man zeige: Die Geraden PD, QE und RF haben einen Punkt gemeinsam.

(Gerd Baron)

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

10./11. Juni 2009

13. Sei $A_{km}(x)$ ein Potenzturm bestehend von unten nach oben aus k Zweiern, einem x und dann m Zweiern. Sei $B_k(y)$ ebenfalls ein Potenzturm, der aber nur aus k Vierern und einem y ganz oben besteht. Also

$$A_{km}(x) = 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^{x^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}}}}}} \qquad \text{und} \qquad B_k(y) = 4^{4^{4^{\cdot^{\cdot^{4^y}}}}}.$$

Man bestimme abhängig von der positiven ganzen Zahl $k > 0$ alle Paare (x, y) nichtnegativer ganzer Zahlen, sodass $A_{kk}(x) = B_k(y)$.

(Bemerkung: Ein Potenzturm der Form a^{b^c} wird berechnet als $a^{(b^c)}$.)

(Gerd Baron)

14. Es seien a und b positive ganze Zahlen mit $a < b$.

   (a) Es bezeichne
   $$M(a, b) = \frac{\sum_{k=a}^{b} \sqrt{k^2 + 3k + 3}}{b - a + 1}$$
   das arithmetische Mittel der Zahlen $\sqrt{k^2 + 3k + 3}$ über $a \leq k \leq b$. Man bestimme $K(a, b) = \lfloor M(a, b) \rfloor$.

   (b) Man bestimme weiters
   $$N(a, b) = \frac{\sum_{k=a}^{b} \left\lfloor \sqrt{k^2 + 3k + 3} \right\rfloor}{b - a + 1},$$
   das arithmetische Mittel der Zahlen $\left\lfloor \sqrt{k^2 + 3k + 3} \right\rfloor$ über $a \leq k \leq b$.

(Dabei ist $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x.)

(Gerd Baron)

15. Gegeben ist das Dreieck ABC. Gesucht sind alle Punkte P im Inneren des Dreiecks, für die das Folgende gilt:

Sei D der Schnittpunkt der Verlängerung von AP mit der Seite BC und sei A' jener Punkt auf dieser Verlängerung, für den $AD = DA'$ gilt. Dann sind die Dreiecke ABC und $A'BC$ kongruent. (Dabei müssen die Punkte einander nicht unbedingt in dieser Reihenfolge entsprechen.) Definiert man die Punkte B' und C' analog, so sind auch die Dreiecke $AB'C$ und ABC' kongruent zu ABC.

(Gerd Baron)